Εξετάσεις Ιουνίου 2024 - Απειροστικός Λογισμός 2

Διδάσκοντας Ε. Νικολιδάκης

Θέμα 1

(i) (1 μον.) Έστω ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα, δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απλά. Το αντίστροφο ισχύει;

(ii) (1 μον.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^5+1} - \sqrt{n^5})$.

(iii) (1 μον.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$.

(iv) (1 μον.) Να βρεθούν τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n^2}$ συγκλίνει.

Θέμα 2

(i) (0,5 μον.) Διατυπώστε (χωρίς απόδειξη) την αρχή της μεταφοράς της ομοιόμορφης συνέχειας.

(ii) (1,25 μον.) Έστω $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Να δειχθεί ότι η σύνθεση $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

(iii) (1,25 μον.) Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{και} \quad g(x) = \sin(\sqrt{x}),\ x \in (0, +\infty)$$

είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

Θέμα 3

(i) (1 μον.) Δίνεται φραγμένη συνάρτηση συνάρτηση $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 2,\ \forall\, x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ ισχύει ότι $U(f,P) \geq 2(b-a)$. Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι το άνω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$ ένaι μεγαλύτερο ή ίσο από $2(b-a)$.

(ii) (1,25 μον.) Δίνται η συνάρτηση $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ \pi & , \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι το άνω ολοκλήρωμα της g στο $[0,1]$ είναι ίσο με 2π και το κάτω ολοκλήρωμα της g στο $[0,1]$ είναι ίσο με π.

Θέμα 4

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) (1 μον.) $\int \frac{1}{(x-2)(x-3)^2}\, dx$

(ii) (1,25 μον.) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\, dx.$